**Вариант 8**

**408.** Непроводящая цилиндрическая (боковая) поверхность радиусом *R*и высотой*H*, заряженная равномерно электричеством с внешней стороны, вращается с угловой скоростью *ω*  вокруг  своей  оси  симметрии. Величина  индукции  магнитного  поля  в геометрическом центре нижней части поверхности равна *В*. Определить величину поверхностной плотности заряда на цилиндрической поверхности.



**418420.** Найти вектор магнитной индукции в точке *О* поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с постоянным током *I*, изогнутым так, как указано на (Рис. 4.21)      (*а* для задачи **418**; *б* для задачи **419**; *в* для задачи **420**).



**428.** Два однозарядных иона   и , пройдя одну и ту же ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Ион  описал дугу окружности радиусом *R*1 = 2 см, а ион  *R*2 = 2,31 см. Определить массовое число иона .

**438.** По мягкому проводу, согнутому в форме квадрата со стороной *а* = 10 см, течет постоянный ток *I* = 10 А. Перпендикулярно плоскости квадрата возбуждено внешнее магнитное поле индукцией *В* = 0,1 Тл, по направлению совпадающее с магнитным моментом тока*I*. При этом провод деформировался и принял форму кольца. Какая работа была совершена силами поля при этом? Работой против упругих сил пренебречь.

448.Бесконечно длинный прямой провод с током 100 А находится в одной плоскости с квадратной рамкой со стороной 10 см. Ближайшая сторона рамки отстоит от провода на расстоянии 5 см. Найти величину заряда, протекающего в рамке, при выключении тока в проводе. Сопротивление рамки 0,05 Ом.

458. Прямой стержень длиной 40 см, на котором равномерно распределен заряд 2 мкКл, вращается относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти угловую скорость вращения стержня, если величина наведенного магнитного момента, обусловленного вращением стержня, равна 9 нА/м2. Определить массу стержня, если отношение модуля магнитного момента к модулю момента импульса стержня равно 10 (мкКл·м)/кг.

468. В замкнутой электрической цепи течет ток 10 А. Сопротивление цепи составляет 20 Ом, а ее индуктивность равна 60 мГн. Определить силу тока в цепи через 0,2 мс после ее размыкания. Как изменится это значение силы тока, если индуктивность цепи уменьшить в 2 раза? Внутреннее сопротивление источника тока мало.

478. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью 1,2 нФ и катушку индуктивностью 6 мГн, активное сопротивление которой 0,5 Ом. Какую среднюю мощность от внешнего источника должен потреблять этот контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе 10 В?

#### **Примеры решения задач**

**Пример 1.**

По тонкому проводящему кольцу радиусом *R*= 0,1 м течет ток *I* = 2 А. Определить модуль вектора индукции магнитного поля этого тока в центре кольца и в точке *С*, расположенной на оси кольца на расстоянии  *а*= 0,1 м  от его центра.



**Решение.** Воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа:

              (4.1)

Векторы индукции магнитного поля  и  в точке *С* от двух равных по величине элементов  и  кругового тока *I*, расположенных на концах одного и того же диаметра кольца, не совпадают по направлению (Рис. 4.1), однако, равны по абсолютной величине

,                                (4.2)

где учтено, что ,  а  .

Тогда модуль вектора индукции *dB* магнитного поля, создаваемого элементами  и  кругового тока *I*  в точке *C* равен

.(4.3)

Для нахождения модуля вектора индукции *BC* магнитного поля, создаваемого в точке  *C* всем круговым током *I*  необходимо проинтегрировать выражение (4.3) по переменной *ℓ*  от   0  до   π*R*:

.              (4.4)

Для центра кольца  *а* = 0  и формула (4.4) будет иметь вид

.                                                    (4.5)

Проведем вычисления  по формулам (4.4)и (4.5):

 (Тл),

 (Тл).

**Пример 2.**

Тонкая медная полоса шириной *a* изгибается и образует цилиндрическую поверхность, радиус которой  *R*. Определить модуль вектора индукции магнитного поля в центре одного из оснований.

**Решение.** На расстоянии   от верхнего основания цилиндра на боковой поверхности выделим узкую полоску шириной  (Рис. 4.2). Величина тока, проходящего по этой полоске , а индукция магнитного поля, создаваемая этим током в точке *О*, равна (см. решение задачи 1):



.          (4.6)

Для нахождения модуля вектора индукции *B*  магнитного поля, создаваемого в точке *О* током *I*, протекающим по всей медной полосе, необходимо проинтегрировать выражение (4.6) по переменной  *x*от   0  до   *a*:

.

Аналогичным образом можно найти модуль вектора индукции магнитного поля в точке, расположенной на оси цилиндра. Для этого необходимо изменить лишь пределы интегрирования.

**Пример 3.**

Длинный диэлектрический цилиндр радиусом *R* статически поляризован так, что во всех точках поляризованность, где ** - положительная постоянная, *r* - расстояние от оси. Цилиндр привели во вращение вокруг его оси с угловой скоростью *ω*. Найти модуль вектора индукции   магнитного поля в центре цилиндра.

**Решение.** По теореме Гаусса для поля вектора поляризованности в дифференциальной форме объемная плотность связанного заряда  в каждой точке диэлектрического цилиндра равна

.

Т.к. в каждой точке диэлектрического цилиндра поляризованность направлена перпендикулярно его оси, а ее величина зависит только от расстояния  *r* до этой оси, то

,

тогда                                                                  .



Выделим в цилиндре элемент в виде тонкого кольца радиусом , толщиной** и высотой ,  объем которого равен   (Рис. 4.3).

В данном тонком кольце сосредоточен заряд

.

Вращаясь с угловой скоростью , этот заряд создает ток силой

,

модуль вектора плотности *j* которого в точке, где расположена площадка , равен

.                                         (4.7)

Для нахождения модуля вектора индукции *B* в центре цилиндра воспользуемся теоремой о циркуляции вектора :

,                                       (4.8)

где *L* – направленный контур *abcd* длиной *R* и шириной *ℓ* (см. рис. 4.3), *S*– площадь поверхности, ограниченной контуром *L*. С учетом направлений векторов  и 

.                                             (4.9)

Найдем интеграл в правой части равенства (4.8), принимая во внимание выражение (4.7),  и направления векторов  и :

.   (4.10)

Выражения (4.9) и (4.10) подставим в уравнение (4.8):

,

откуда модуль вектора индукции *B* магнитного поля в центре цилиндра равен

.



**Пример 4.**

Определить модуль силы, действующей на прямой проводник *AС*,  со  стороны  магнитного  поля  бесконечно  длинного  тока  *I*1 = 10 А (Рис. 4.4).Проводник лежит в плоскости тока *I*1 и перпендикулярен к нему. Расстояние *r*2 = 5*r*1. По проводнику*AС*течет ток  *I*2 = 5 А.

**Решение.** Проводник *АС* находится в неоднородном магнитном поле бесконечного прямолинейного тока *I*1. Выделим в проводнике *АС* элемент , находящийся на расстояние *r* от бесконечного проводника. На этот элемент со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера

,                                            (4.11)

где *I*2 - сила тока в проводнике *АС*;   – вектор индукции магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током *I*1 в месте расположения элемента.

Модуль вектора индукции магнитного поля бесконечно длинного проводника с током *I*1 на расстоянии *r*от него равен

,                                                  (4.12)

а его направление перпендикулярно элементу  (см. рис. 4.4).

Тогда         согласно (4.11) модуль силы  *dF*, действующей на элемент  с током *I*2 со стороны магнитного поля тока *I*1 равен

,                            (4.13)

где учтено выражение (4.12) и равенство  *dℓ* = *dr*.

Интегрируя правую часть выражения (4.13) по переменной *r* от  *r*1  до  *r*2 находим модуль силы, действующей на прямой проводник *AС*, со стороны магнитного поля бесконечно длинного тока *I*1:

.

Проведем  вычисления:

 (Н).

**Пример 5.**

Электрон движется по винтовой линии с радиусом *R* и шагом *h* в однородном магнитном поле индукцией *B*. Определить модуль скорости электрона.



**Решение.** Разложим вектор скорости  электрона на две составляющие (Рис. 4.5): , направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции, и  , направленную вдоль этих линий:

.

Тогда модуль скорости  можно выразить через модули составляющих  и :

                          (4.14)

По второму закону Ньютона

,                        (4.15)

где *m* – масса электрона,  – ускорение, сообщаемое ему силой Лоренца ,  *е* – заряд электрона,  – вектор магнитной индукции. Модуль силы Лоренца равен

,                                      (4.16)

где учтено, что , *α* – угол между векторами  и  (см. рис. 4.5).

Т.к. сила Лоренца  всегда перпендикулярна вектору скорости  частицы, то она сообщает ей нормальное ускорение:

,                                                 (4.17)

где *R* – радиус винтовой линии.

С учетом (4.16) и (4.17) уравнение (4.15) можно записать в скалярном виде:

,

откуда                                 .                                                (4.18)

Период *Т* обращения электрона равен

.

Модуль составляющей скорости , направленной вдоль силовых линий магнитного поля, можно выразить через шаг *h* винтовой линии и период *Т* обращения:

.                                               (4.19)

Подставляя выражения (4.18) и (4.19) в уравнение (4.14), находим модуль скорости движения электрона:

.

**Пример 6**.

По тонкому стержню длиной  *ℓ*  равномерно распределен заряд *q*. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью *ω* относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину. Определить:  1) магнитный момент, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса , если масса стержня равна *m*.



**Решение.**1) На расстоянии  от оси вращения *ОО'* выделим элемент стержня длиной  (Рис. 4.6). Этот элемент обладает зарядом . Вращающийся с угловой скоростью *ω* заряд  *dq* эквивалентен круговому току силой  *dI*, равной

.                                          (4.20)

Магнитный момент *dpm* кругового тока *dI*, радиусом *x* равен

,                    (4.21)

где  – площадь, ограниченная током *dI*.

Так как направления магнитных моментов всех элементов стержня совпадают, то полный магнитный момент *pm*, обусловленный вращением всего заряженного стержня, найдем интегрированием выражения (4.21) по переменной  *x* от  –*ℓ*/2   до   *ℓ*/2:

**.                          (4.22)

2) Модуль момента импульса *L* стержня относительно оси вращения *ОО'* равен

,

где  – момент инерции стержня относительно оси *ОО'*,  *ω* – угловая скорость его вращения. Тогда

.                                                 (4.23)

С учетом выражений (4.22) и (4.23) отношение магнитного момента вращающегося стержня к его моменту импульса  равно

.

**Пример 7.**

Прямоугольный треугольник лежит в плоскости *xOy*. Модуль индукции магнитного поля, перпендикулярного этой плоскости, изменяется по закону , где  Тл·м–1. Найти поток вектора  через этот треугольник, если  *а* = 8 см,  *b* = 10 см,  *c* = 10 см  (Рис. 4.7).



**Решение.** Выделим в треугольнике элементарную площадку *dS*высотой *h*, шириной *dx*, находящуюся на расстоянии *x* от начала координат. Магнитный поток *d*Φ, пронизывающий эту площадку, равен                                    .

Так как в выделенной области модуль индукции магнитного поля  , а площадь , то

.                                                (4.24)

Высоту *h*выразим через переменную *x*, воспользовавшись соотношением подобия:

,     откуда     .

Тогда выражение (4.24) примет вид

.

Проинтегрировав это выражение по переменной   *x* в  пределах  от  *а*  до   *а*+*b*, найдем магнитный поток Φ, пронизывающий весь треугольник:

.

Проведем  вычисления:             (Вб).

**Пример 8.**

Катушка, содержащая 200 витков, сечением 50 см2 равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией 0,5 Тл с частотой 20 Гц. В начальный момент времени ось катушки параллельна силовым линиям поля. Найти зависимость ЭДС как функцию времени и мгновенное значение ЭДС, соответствующее повороту катушки на угол 300.

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции  определяется из закона Фарадея:

,                                                  (4.25)

где Ψ - полный магнитный поток (потокосцепление), равный

,                                              (4.26)

где *N* - число витков, *B* - модуль вектора индукции магнитного поля,  *S* – площадь сечения витков,  *φ* – угол между нормалью к площади витков и вектором индукции .

При равномерном вращении катушки в магнитном поле угол *φ* зависит от времени *t* по закону:

,

где учтено, что угловая скорость  катушки связана с частотой  ее вращения как , а согласно начальным условиям .  Тогда, принимая во внимание (4.26), зависимость от времени *t* полного магнитного потока Ψ имеет вид

.

Продифференцировав это выражение по t, согласно (4.25) получим зависимость ЭДС как функцию времени:

.

Величина (модуль) мгновенного значения ЭДС индукции, соответствующего повороту катушки на угол 300, равна

 (В).

 Пример 9.

Металлический стержень длиной *ℓ* = 50 см движется поступательно параллельно прямолинейному проводнику с током *I* = 10 А со скоростью  = 20 см/с (Рис. 4.8). Ближайший конец стержня находится на расстоянии *а* = 0,25 м от проводника. Вычислить ЭДС индукции, наведенную в стержне.

Решение. Выделим в стержне элемент длиной , находящийся на расстоянии  от проводника. Модуль вектора магнитной индукции поля, создаваемого бесконечным прямым током *I* на расстоянии  от него равен



.                                                   (4.27)

При движении стержня со скоростью  в элементе стержня  будет возбуждаться электродвижущая сила индукции  *dεi*:

.                                       (4.28)

Проинтегрировав (4.28) по переменной  *x* в  пределах  от  *а*  до  *а*+*ℓ*,   найдем ЭДС индукции, возбуждаемую в стержне:

.

Проведем  вычисления:

 (В).

Пример 10.

 Какую площадь сечения должен иметь длинный соленоид с железным сердечником, чтобы при токе силой *I* = 0,2 А энергия магнитного поля в нем была *W* = 0,3 Дж. Длина соленоида *ℓ* = 50 см, его обмотка имеет *N*= 4000 витков.

Решение. Индуктивность *L* длинного соленоида

,

|  |
| --- |
| *Чугун* |

|  |
| --- |
| *Железо* |

|  |
| --- |
| *Сталь* |



где  – магнитная проницаемость железа, *N* – число витков обмотки соленоида, *S* и *ℓ* – его площадь сечения и длина соответственно. Тогда площадь сечения *S* соленоида

.      (4.28)

Индуктивность *L* найдем из формулы энергии магнитного поля тока соленоида   :

.      (4.29)

Так как магнитная проницаемость  ферромагнетиков, к которым относится железо, не является постоянной величиной, а зависит от величины напряженности *H* магнитного поля, то ее значения найдем из следующего соотношения:

,                                                  (4.30)

где *B*1 и*H*1 – значения магнитной индукции и напряженности соответственно магнитного поля в железе, являющиеся координатами какой-либо точки на основной кривой намагничивания *B*(*H*) для железа (рис. 4.9).

Подставив выражения (4.29) и (4.30) в формулу (4.28), получим:

.                                     (4.31)

Из теоремы о циркуляции вектора  следует, что величина напряженности *H* магнитного поля внутри длинного соленоида определяется силой тока *I* в его обмотке:

,

то при силе тока *I*1 = 0,2 А величина напряженности *H*1 магнитного поля равна

 (А/м).

По графику основной кривой намагничивания *B*(*H*) для железа (см. рис. 4.9) по известному значению*H*1 находим соответствующее ему значение индукции *B*1:

*B*1 = 1,42 Тл.

Подставляя найденные значения *H*1 и *B*1, а также данные задачи в выражение (4.31), вычислим площадь сечения катушки

 (м2).

Пример 11. Плоский квадратный контур со стороной *a* = 10 см, по которому течет ток *I* = 100 A, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией *B* = 1 Тл. Определить минимальную работу *A*, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середины его противоположных сторон, на угол: 1) ; 2) . При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.



Решение. Как известно, на контур с током в магнитном поле действует вращающий момент сил Ампера  (Рис. 4.10), модуль которого равен

,       (4.32)

где  - модуль вектора магнитного момента контура с током *I*, который ограничивает площадь ;   - модуль вектора магнитной индукции;  - угол между векторами   (направлен по нормали к контуру) и .

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле, т.е. векторы  и  сонаправлены, значит, . При этом вращающий момент амперовых сил (4.32) равен нулю *M*0 = 0. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил  будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Этот момент сил должен быть скомпенсирован моментом внешних сил , работу которых надо найти. Поскольку искомая работа минимальна, то . Тогда с учетом (4.32) модуль момента внешних сил равен

.                                            (4.33)

Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота ), то для вычисления работы применим формулу работы в дифференциальной форме . Учитывая формулу (4.33), получаем

.

Проинтегрировав это выражение по переменной  *φ*  в пределах от *φнач*  до  *φкон*, найдем минимальную работу, совершаемую внешними силами при повороте на конечный угол Δ*φ* = *φкон* – *φнач*:

.     (4.34)

Работа *Авнш*1, совершаемая внешними силами при повороте на угол  от 0  до :

.    (4.35)

Проведем  вычисления:

 (Дж).

При вычислении работы *Авнш*2, совершаемой внешними силами при повороте на угол  от 0  до  ,  учтем, что угол  мал, и заменим в выражении (4.34) , где [] = рад:

.                                   (4.36)

Выразим угол   в радианах:            и вычислим *Авнш*2:

 (Дж).

Эту задачу можно решить и другими способами:

1. Работа *Авнш* внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле совершается против работы сил Ампера и поэтому равна произведению силы тока *I* в контуре на убыль магнитного потока   (–ΔΦ) через поверхность, ограниченную этим контуром:

,

где  - магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром до его перемещения;  - после перемещения.

При вычислении работы *Авнш*1, совершаемой внешними силами при повороте на угол  от   *φнач* = 0  до    значения магнитных потоков:

  и  .

Следовательно,

,

что совпадает с (4.35).

При вычислении работы *Авнш*2, совершаемой внешними силами при повороте на угол  от 0  до малого угла  рад будем иметь:

,

 что совпадает с (4.36).

2. Работа *Авнш* внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна приращению механической потенциальной энергии  этого контура:

,

где  – механическая потенциальная энергия контура с током *I* в магнитном поле индукцией ;  – вектор магнитного момента плоского контура с током *I*, который ограничивает площадь *S*;   – единичный вектор нормали к контуру, направление которого связано с направлением тока в контуре правилом правого винта; *φ* – угол между векторами  и .  Учитывая, что *S* = *a*2, получаем:

,

что совпадает с (4.34).

Пример 12.

Квадратная проволочная рамка со стороной  *a* = 5 см и сопротивлением *R* = 10 мОм находится в однородном магнитном поле индукцией *B* = 40 мТл. Нормаль к плоскости рамки составляет угол *φ* = 300 с линиями магнитной индукции. Определить заряд *q*, который пройдет по рамке при выключении магнитного поля.

Решение. При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока Φ через поверхность, ограниченную проволочной рамкой. Вследствие этого в рамке возникает ЭДС индукции *εi*, определяемая основным законом электромагнитной индукции:

.                                                 (4.37)

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение  *Ii* которого по закону Ома для замкнутой цепи равно

,                                                    (4.38)

где  - сопротивление рамки.

С другой стороны, согласно определению силы тока:

.                                                    (4.39)

Из уравнений (4.38) и (4.39) выразим *εi*:



и подставим найденное выражение в закон (4.37):

,

откуда                                                          .

Проинтегрировав это выражение

,

получим

,                                             (4.40)

где  - магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром до выключения магнитного поля;  - после выключения.

Магнитный поток Φ через плоскую поверхность площадью *S*, находящуюся в однородном магнитном поле индукцией *B*, равен:

,

где  *φ* – угол между положительной нормалью к поверхности и вектором магнитной индукции .  Учитывая, что *S* = *a*2, получаем:

.

В начальном состоянии *φнач*= *φ* и, учитывая, что *S* = *a*2, получаем:

.                                             (4.41)

В конечном состоянии после выключения магнитного поля*В* = 0, тогда

.                                                   (4.42)

Подставляя (4.41) и (4.42) в (4.40), найдем заряд *q*, который пройдет по рамке:

.

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу заряда (Кл):

.

Проведем вычисления:

 (Кл).

**Пример 13**.

В электрической цепи, состоящей из резистора сопротивлением R = 20 Ом и катушки индуктивностью L = 0,06 Гн, протекает ток I0 = 20 А. Определить силу тока в этой цепи через t1 = 0,2 мс после ее размыкания.

Решение. Сила тока *I* в электрической цепи при отключении источника тока убывает экспоненциально со временем *t* и выражается формулой

,

где  - сила тока до отключения источника;  - сопротивление цепи;  - индуктивность цепи.

Величина тока в момент *t*1 равна

 (А).